FREDRIK EHRNST

Studieplan i

MATEMATIK

FÖR 9:e SKOLÅRET

(Alternativkurs 1)

VID PEDAGOGISK FÖRSÖKSVERKSAMHET I ÖVERENSSTÄMMELSE MED BESLUT AV 1950 ÅRS RIKSDAG

ALMQVIST & WIKSELL · STOCKHOLM

STUDIEPLANERNA

i denna serie har utarbetats på uppdrag av kursplanedelegationen inom 1946 års skolkommission.

Författarna till studieplanerna har icke varit bundna av andra föreskrifter än de huvudmoment för försöksverksamheten, vilka på förslag av skolkommissionen och dess kursplanedelegation fastställts av skolöverstyrelsen. Ehuru kursplanedelegationen underkastat studieplanerna viss granskning, är respektive författare helt ansvariga för planernas utformning och innehåll.

Ivar Hæggströms Boktryckeri A. B.
Stockholm 1953

AV KUNGL. SKOLÖVERSTYRELSEN FASTSTÄLLDA KURSFÖRESKRIFTER

Matematikundervisningens mål i enhetsskolan

Undervisningen i matematik har till uppgift att ge kunskap och färdighet i räkning samt någon förtrogenhet med algebrans och geometrins elementära begrepp och metoder. Eleverna bör förvärva säkerhet och snabbhet i såväl huvudräkning som skriftlig räkning. De bör göras förtrogna med allmänt brukliga matematiska uttryck, och deras natur- och samhällsorientering bör vidgas genom räkneproblemens sakliga innehåll. Ämnets logiska bildningsvärde bör tillvaratagas både inom aritmetiken, algebran och geometrin. Genom undervisningen i geometri bör förmågan av rumsföreställning uppövas och den geometriska fantasin utvecklas. Elevernas personlighetsfostran bör befrämjas därigenom, att de får erfara vikten av samvetsgrant och mycket noggrant arbete samt nödvändigheten av tanke- och viljeansträngning för att förelagda uppgifter skall kunna lösas.

Huvudmoment

HÖGSTADIET

Klass 9 a och 9 g. Kursen uppdelas i två alternativkurser: en med tyngdpunkten i algebra och geometri och en med tyngdpunkten i aritmetik. Därtill kommer vissa kursmoment som läses av klassens alla elever.

Gemensam kurs:

Repetition och fördjupning av förut inhämtad kurs.
Tabeller och diagram.
Enkla statistiska begrepp.
Allmänt brukliga matematiska uttryck och beteckningar.

A l t e r n a t i v k u r s 1:

Algebra:

De fyra räknesätten med bokstavsuttryck.

Ekvationer och ekvationssystem av första graden.

Räkning med kvadratrötter.

Begreppet irrationellt tal.

Proportionalitet. Praktiska tillämpningsuppgifter.

Grafisk framställning.

Geometri:

En systematisk genomgång av viktigare geometriska satser med bevis. Särskilt uppmärksammas transversal- och likformighetssatserna samt Pythagoras' sats.

Planimetriska och stereometriska beräkningar.

A l t e r n a t i v k u r s 2:

Fortsatt övning av de fyra räknesätten i hela tal, decimalbråk och allmänna bråk.

Fortsatt tillämpning av ekvationsmetoden.

Uppgifter valda med hänsyn till det praktiska livets krav och till undervisningen i andra ämnen, särskilt samhällskunskap.

Användning av tabeller angående försäkringar och sammansatt ränta.

Om främmande länders mynt.

Procent- och promilleräkning med tillämpningar.

Något om konen och klotet.

Geometriska uppgifter av praktisk betydelse.

Anmärkningar

1. Huvudmomenten anger, vad *grundkursen* i allmänhet bör omfatta, dvs. det som samtliga elever på ifrågavarande stadium bör arbeta med. En del av grundkursen — en kärna av oumbärliga färdigheter och kunskaper — bör om möjligt alla elever lära sig att säkert behärska.

   Utöver grundkursen skall elevernas arbete omfatta *överkurser*. Av dessa kan en del vara gemensamma för klassavdelningens elever och avpassade med hänsyn till klassens standard, lärarnas och elevernas särskilda intressen samt lokala förhållanden. Dessutom bör så många elever som möjligt, enskilt eller i mindre grupper, arbeta med individuella överkursuppgifter, vilkas inriktning, omfång och svårighetsgrad självfallet blir beroende av varje elevs intresse och förmåga. Sådana uppgifter, såväl inom som utom huvudmomentens område, bör väljas i samråd med eleverna. I fråga om både grundkurs och överkurs bör arbetsmetoder och redovisningssätt så långt möjligt avpassas efter elevernas individuella förutsättningar.

Överkurserna i matematik kan omfatta fyllnads- och tillämpningsuppgifter men också få den formen, att elever med stora förutsättningar för ämnet tillåts att arbeta med en kurs, avsedd för högre klass.

2. Eleverna bör systematiskt övas att arbeta självständigt och under eget ansvar och att därvid utnyttja olika slags studie- och arbetsmaterial, utföra egna försök, göra egna iakttagelser och sammanställningar och på grundval därav dra slutsatser. Det självständiga arbetet, inklusive överkurserna redovisas bl. a. genom skriftliga rapporter, muntliga redogörelser och medverkan i diskussioner.

3. Målmedvetet bör man söka vänja eleverna vid produktivt och friktionsfritt samarbete med kamrater. Åtskilliga av uppgifterna inom ämnet kan lösas under grupparbete eller andra former för samarbete mellan eleverna.

4. Samverkan bör ske med undervisningen i fysik, samhällskunskap, hemkunskap, teckning och slöjd. I görligaste mån bör valet av uppgifter stödja undervisningen också i övriga ämnen. Matematikundervisningen bör lämna stöd åt undervisningen i modersmålet genom att ge övning i muntlig och skriftlig framställning samt i exakt läsning.

5. Ett huvudsyfte vid räkneundervisningen bör vara, att eleverna erhåller färdighet i huvudräkning. Så ofta det fin-

nes lämpligt, bör de åskådliggörande räkneexempel, som avser att införa eleverna på ett nytt område, väljas så, att de kan lösas genom huvudräkning. Under lågstadiets två första terminer är all räkning huvudräkning. Först efter införande av skriftliga metoder för uträkning av tecknade uppgifter blir särskilda huvudräkningsövningar behövliga.

6. Lågstadiets kurs innehåller momentet: »Uppfattning och beteckning av talen inom talområdet 1—10 000». Detta moment kan fördelas på de tre årskurserna så, att talområdet utsträckes till 100 i första klass, till 1 000 i andra klass och till 10 000 i tredje klass. Därvid måste dock iakttagas, att i första klass endast mycket lätta uppgifter behandlas inom talområdet över 10, t. ex. 56 + 3, men ej 56 + 8 (alltså ej tiotalsövergång). Lättare uppgifter inom det högre talområdet behandlas i allmänhet före svårare inom det lägre.

7. Additions- och subtraktionstabellerna bör i allmänhet vara inlärda före andra skolårets slut. Med additionstabellen menas här summorna av två ensiffriga tal vilka som helst, och med subtraktionstabellen de motsvarande subtraktionsuppgifterna.

8. Multiplikationstabellen övas särskilt under tredje skolåret och bör inläras fullständigt i fjärde klass.

9. Den mera systematiska kursen i allmänna bråk torde böra påbörjas under femte skolåret. Men i god tid före arbetet med de särskilda kursmomenten bör barnen göras bekanta med bråktal och deras beteckning. Denna förberedelse kan ske redan under fjärde skolåret. Ges den förberedande undervisningen i allmänna bråk först i femte klassen bör likväl tillses att rätt lång tid förflyter mellan denna förberedelse och den följande kursen i allmänna bråk.

10. Kursmomentet »Något om kvadratrötter i klasserna 7—8» avser att göra eleverna bekanta med begrepp och beteckning och ge dem färdighet i användning av en rottabell.

11. Kursen i geometri i klasserna 7—8 omfattar framför allt planimetriska och stereometriska beräkningar. Den systematiska genomgången av geometriska satser med bevis hör till klass 9. De mera matematiskt begåvade eleverna bör emellertid redan i klasserna 7—8 göras bekanta med hur en geometrisk sats bevisas med hjälp av andra satser.

12. I anslutning till kursmomentet »Enkla fältmätningsövningar» är det lämpligt låta eleverna syssla med indirekt mätning av avstånd och höjder samt med mätning av höjd- och synvinklar.

13. Som exempel på allmänt brukliga matematiska uttryck och beteckningar, som eleverna skall känna till, kan nämnas ord som ellips, spiral, kubikrot och tecknen för »större än» och »mindre än» samt dignitetsbeteckning.

INDELNING I KURSAVSNITT

I	(4)	Repetition av procenträkning. Inköpspris, pålägg, försäljningspris m. m.
II	(4)	Fördjupning av det föregående på procenträkning.
III	(4)	Lösning av benämnda uppgifter med ekvationsmetoden.
IV	(5)	Algebra. Repetition.
V	(5)	Algebra. Repetition och fördjupning.
VI	(10)	Geometri.
VII	(5)	Ekvationer. Repetition.
VIII	(5)	Ekvationssystem.
IX	(8)	Benämnda uppgifter. Problem hämtade från det praktiska livet.
X	(4)	Tabeller och diagram.
XI	(2)	Några enkla statistiska begrepp.
XII	(2)	Proportionalitet.
XIII	(6)	Transversalsatsen. 3:e likformighetsfallet. Satsen om ytskalan.
XIV	(3)	Pythagoras' sats med tillämpningar.
XV	(8)	Kvadratrötter. Irrationella tal.
XVI	(5)	Planimetriska uppgifter med kvadratrötter. Kvadraten och den liksidiga triangeln.
XVII	(4)	Cirkeln och cirkelsektorn.
XVIII	(4)	Planimetri. Blandade uppgifter på likformighet och Pythagoras' sats.
XIX	(12)	Stereometri.
XX		Allmänt brukliga matematiska uttryck och beteckningar.

Siffrorna inom parentes anger de timmar, som förslagsvis skall anslås till kursen.

INLEDNING

Först lämnar jag några principiella synpunkter, som berör denna studieplan.

De elever, som skall läsa matematik alternativkurs 1 i klass 9 kommer från olika klasser, ibland t. o. m. från skilda skolor. Så länge det ej finns någon för enhetsskolans högstadium utarbetad lärobok i matematik, blir de kunskaper, som eleverna inhämtat i klass 7 och 8, även härigenom rätt olikartade. Till detta kommer att det i Åstrands studieplan för klass 7 och 8, på vilken denna framställning bygger, finns så mycket stoff medtaget, att det för dess fullständiga behandling kräves minst 300 t. Eftersom endast omkring 200 t. står till förfogande, tvingas lärarna att behandla vissa områden mera summariskt. Om en sådan reduktion göres olika i de skilda klasserna i ett distrikt, bidrager detta att göra elevernas förkunskaper mycket skiftande.

Vidare måste man räkna med, att de elever, som väljer alternativkurs 1, har mycket skilda studieförutsättningar i intellektuellt avseende. I den nuvarande realskolan har lärarna möjlighet att gallra ut de elever, som visat sig ha svårigheter att följa med undervisningen. För tillträde till gymnasiet är anordnad betygsspärr. I enhetsskolan däremot skall kvarsittning i regel ej förekomma, och det har ej nämnts om någon inskränkning i rätten att välja alternativkurs i klass 9. Elevmaterialet blir därför både vad beträffar förkunskaperna och förmågan att lösa matematiska uppgifter rätt heterogent. Det är därför viktigt, att läraren noggrant sätter sig in i vad eleverna lärt sig i föregående klass, dels genom att kontakta deras föregående lärare, dels genom anordnande av prov. En elev, som visat sig behärska ett kursavsnitt, kan vid repetitionen i klass 9 sysselsättas med överkursuppgifter eller också sättas att fylla i luckor på andra kursavsnitt, där han kanske ligger efter kamraterna.

Jag har vid uppgörandet av denna studieplan kraftigt reducerat det som f. n. fordras i realskolan. Hänsyn har därvid i främsta rummet tagits till gymnasiets (särskilt realgymnasiets) krav på *fasta* kunskaper i algebra och geometri. Reduktionen har i främsta rummet gått ut över s. k. praktiska uppgifter: främmande mynt, växlar, aktier och obligationer. Men även på andra områden måste viss reduktion ske, i och med att uppgifternas svårighetsgrad nedskäres.

Studieplanen är indelad i 20 kursavsnitt. Till vart och ett av dem har jag anslagit ett visst antal lektionstimmar. Jag har då utgått från att 4 veckotimmar i ett ämne ger ungefär 120 timmar per läsår. Resten bortgår genom lovdagar, idrottsdagar och på grund av skrivningar. Till genomgång och ev. preparering av matematikskrivningar (5 st.) har anslagits 10 t. Till »marginal» har avsatts 10 t. Dessa timmar är avsedda att fylla ut den tid, som är anslagen till ett visst område och som visat sig för knappt tillmätt. För undvikande av missförstånd vill jag påpeka, att läraren har full frihet att ta kursavsnitten i den ordning, som bäst passar honom och eleverna. Vidare är det ej meningen att läraren på något sätt skall vara bunden genom den på sid. 8 angivna timfördelningen. Den skall enligt min avsikt vara ett stöd vid planläggningen av arbetet. Det ligger i försöksverksamhetens natur att den skall vara fri. Å andra sidan skall en viss grundkurs medhinnas utan jäkt och hets.

Kungl. Skolöverstyrelsen, som har hand om ledningen och övervakningen av försöksverksamheten, kommer att liksom nu sker vid realexamen utge skriftliga prov i matematik i klass 9. Dessa prov jämte de erfarenheter, som vunnits vid de första årens försöksverksamhet, kommer att påverka den vidare utvecklingen, så att med all sannolikhet en ny studieplan blir nödvändig. Denna bör kunna anknyta till läroböcker, som skrivits speciellt för alternativkurs 1 i klass 9.

Jag förutsätter sålunda, att man vid de första årens försöksverksamhet får nöja sig med redan existerande läroböcker. Jag har fördenskull hänvisat dels till Rendahl-Wahlström-Frank: Räknebok för realskolan del II och III (förkortat till R. W. Fr. II resp. III), dels till Sjöstedt: Lärobok i Geometri för realskolor och därmed jämförliga läroanstalter. Jag hänvisar också ofta till rektor Åstrands studieplan för försöksverksamheten i klasserna 7 och 8 i enhetsskolan. Kursavsnitt X i denna skrives förkortat Åstrand X.

Jag har med avsikt ej lämnat utförliga metodiska anvisningar till de olika kursavsnitten. Ju högre upp undervisningen kommer, desto vanskligare är det att ge förslag till detaljerad metodik. Jag vill dock här påpeka vikten av att huvudräkning användes i stor utsträckning både när ett nytt avsnitt skall inläras och när förut genomgångna moment skall kontrolleras. I en lärobok för denna klass bör det därför finnas rikligt med huvudräkningsexempel. Jag lämnar på en del håll några exempel på sådana uppgifter. Dessa bör tagas före en systematisk genomgång. Det är meningen, att eleverna själva skall komma på något sätt att lösa uppgifterna. Har de då arbetat sig fram på olika vägar, så bör dessa tagas upp till diskussion.

Jag har vid utarbetandet av studieplanen utgått ifrån att antalet elever, som läser alternativkurs 1 och 2 i en skola, är så pass stort att någon samläsning ej anordnas. Är emellertid elevantalet i endera av dessa avdelningar litet, så är det möjligt att viss form av samläsning prövas. Den för de båda avdelningarna gemensamma kursen finns i denna studieplan upptagen i kursavsnitten I t. o. m. III samt IX t. o. m. XI. Eftersom den härför anslagna tiden (26 t.) utgör $1/4$ av hela den disponibla tiden kan man tänka sig, att gemensam undervisning i matematik äger rum under 1 veckotimme. Men någon samläsning utöver denna enda veckotimme vill jag inte tillråda, åtminstone inte under de första åren, då lämpliga läroböcker saknas och då metodiken skall utprövas. Det kommer ändå att medföra så mycket extra arbete för de lärare, som skall undervisa vid försöksverksamheten, att en ytterligare belastning kan äventyra resultatet.

De resultat, som kan uppnås vid undervisningen i matematik, beror till stor del av hur de skriftliga proven anordnas. Stor omsorg måste därför nedläggas vid dessas hopsättande och rättande.

Uppgifternas antal bör vara relativt stort (omkr 10 st.). De flesta bör vara av standardtyp, dvs. likna sådana som förut genomgåtts under lektion. Endast ett par bör vara av svårare karaktär. En norm bör vara att alla elever skall ha full sysselsättning under den tillmätta tiden och att åtminstone några skall ha möjlighet att räkna alla talen. Det har ofta påpekats att uppgifternas svårighetsgrad skall anpassas efter elevernas förmåga, så att ingen elev ställes inför oöverkomliga svårigheter.

Provet skall i främsta rummet ge ett utslag på hur eleverna tillgodogjort sig undervisningen på ett visst område. I andra hand skall provräkningen befästa de vunna kunskaperna genom att ge övning på samma moment som förut genomgåtts. Först i sista hand skall skrivningen pröva elevernas matematiska begåvning. De skall få spänna sina krafter på några svårare uppgifter. Sammanfattningsvis kan sägas att proven skall ge eleverna tillfälle att visa vad de *kan*, ej vad de *inte kan*. Vad betygen beträffar bör kraven ställas så, att om möjligt alla uppnår godkänt resultat. Klassens medelbetyg bör vara Ba.

Uppgifterna bör vara omväxlande. Att räkna med formler är nyttigt och förekommer i stor utsträckning vid lösning av tekniska och fysikaliska problem. En viss formell uppställning vid lösandet av problem är också mången gång lämplig. Men ensidighet är härvidlag direkt skadlig. Om endast sådana uppgifter ges som passar in i det inlärda schemat, står sedan många elever handfallna inför mycket enkla uppgifter på området, när de möter dem i det praktiska livet.

Stor omsorg bör även ägnas åt uppgifternas formella behandling. Slarviga siffror och oredig uppställning motverkar ofta uppnåendet av ett rätt resultat. Man bör även kräva ordentligt antagande om obekanta (x) införes. Svaret på benämnda uppgifter bör anges med fullständig mening.

Vad metodiken f. ö. beträffar hänvisar jag till ett cirkulär från Kungl. Skolöverstyrelsen: *Ändringarna i de metodiska anvisningarna till undervisningsplanen för rikets allmänna läroverk,* infört i Aktuellt från Skolöverstyrelsen 1951: 4.

KURSAVSNITT I

Repetition av procenträkning (utan ekv.). Inköpspris, pålägg, försäljningspris m. m.

1. Repetera begreppen fakturapris, inköpskostnader, inköpspris, pålägg, försäljningskostnader, försäljningspris, bruttopris, nettopris, rabatt, vinst och förlust.
   Grundkurs: R. W. Fr. II 330—337.
   Överkurs: ex. 338—348.

   Begreppen blir mer konkreta om man anknyter dem till ett praktiskt exempel: En cykelhandlande köper en cykel från fabriken. Fakturapriset är 190 kr. Frakten till affären (= inköpskostnaden) uppgår till 10 kr. Ink.pris = 200 kr. **Han lägger på 60 kr. (= pålägg). Försäljningspris = 260 kr.**

2. För att undvika splittring har jag koncentrerat repetitionen av procenträkning till ett mycket begränsat område, nämligen affärsräkningen. Lämpligt är dock att vid huvudräkning och på provräkningar öva procenttal även från andra områden. Man bör då, om tveksamhet råder, omtala på vilken storhet procenten skall tagas.

KURSAVSNITT II

Repetition av procenträkning (med ekv.)

De uppgifter, som här förekommer, tillhör i huvudsak någon av följande tre typer:

a) Beräkna inköpspriset, om man känner försäljningspriset och pålägget, uttryckt som en viss procent av inköpspriset.

b) Beräkna bruttopriset, då nettopriset och rabattprocenten är kända.

c) Beräkna påläggsprocenten, om man känner inköpspris och försäljningspris.
Lämpliga exempel finns i R. W. Fr. II:
för grundkurs ex. 123—127
för överkurs ex. 740—757.
I dessa exempel förekommer bl. a. $6^2/_3$ % och $33^1/_3$ %. Sådana procenttal bör ägnas särskild uppmärksamhet eftersom de eventuellt ej blivit tillräckligt behandlade förut.

KURSAVSNITT III

Lösning av benämnda uppgifter med hjälp av ekvationer

Eftersom lösning av problem med ekvationsmetoden enligt Åstrands studieplan ej övats så flitigt, som man f. n. gör i realskolan, gäller det för läraren att gå försiktigt fram.

Kontrollera elevernas förmåga att 1) göra ett ordentligt antagande (med fullständig mening), 2) uppställa en ekvation (ev. efter en kort motivering), 3) lösa denna och sedan 4) skriva svar (med fullständig mening).

Som lämpliga övningsexempel torde man få anse R. W. Fr. II 236—273 (valda ex.), kompletterade med några bland exemplen 309—329.

Det är mycket vanskligt att förutsäga, hur eleverna kommer att reagera inför dessa problem. För somliga av dem är kanske exemplen för lätta, men jag misstänker starkt, att de kommer att utgöra lagom svåra nötter att knäcka för ett flertal. Läraren får dessutom genom denna sondering en utgångspunkt för hopsättandet av provräkningarna.

KURSAVSNITT IV

Algebra. Repetition

1. Reduktion av en algebraisk summa.
   Borttagning av parenteser.
   R. W. Fr. II ex: 500, 504, 505, 508.
   Repetera begreppen binom, polynom koefficient.
2. Multiplikation av digniteter (ex. $3a^3 \cdot a^2$)
   R. W. Fr. II 512—523. Huvudräkning.
   Repetera begreppen dignitet, bas, exponent. Jfr Åstrand XVIII 6.
3. Multiplikation av monom och binom [ex. $3a(a^2 + ax)$]
   R. W. Fr. II 538—545 (valda ex.).
4. Multiplikation av enkla polynom t. ex. $(a^2 + ab)\ (a—b)$
   R. W. Fr. II 546—554 (valda ex.). Jfr Åstrand XVIII 9.

Lämpligt är att ungefär en kvart av lektionen ägnas åt huvudräkning på området i fråga. Läraren kan då snabbt upptäcka förekomsten av eventuella brister. Under resten av lektionen bör eleverna få räkna på egen hand, och läraren kan ägna sig åt individuell undervisning. Det är av stor betydelse särskilt för de elever, som skall fortsätta på gymnasiet, att de vinner säkerhet i utförandet av algebraiska operationer, och detta ernås endast genom att de får arbeta själva på många och lätta uppgifter.

KURSAVSNITT V

Algebra. (Repetition och fördjupad kurs.)

Kvadreringsreglerna och konjugatregeln. Upplösning i faktorer genom utbrytning. Förkortning av bråk. De fyra räknesätten tillämpade på bokstavsuttryck i bråkform.

1. Kvadreringsreglerna och konjugatregeln inläres och tränas med huvudräkning. R. W. Fr. II ex. 571—579.

2. Träningsräkna sedan på uppgifterna 585—587 och 607—609; de är exempel av typen $(x+7)^2+(x-5)^2$ och $(x+3)^2-36=x^2$.

3. Förenkla uttryck av formen $5\,ab : a$ och $x^6 : x^3$, där divisionen går jämnt ut. Ex. 624—627 (huvudräkning).

4. Upplös polynom i faktorer genom att bryta ut så mycket som möjligt. Ex. 628—630 (huvudräkning). Jfr Åstrand XIX.

5. Förkorta bråk av typen $\frac{x^4}{x^7}$. Ex. 662, 663 och 666.

   En sak, som brukar bereda huvudbry, är att man ej får förkorta med a i uttrycket $\frac{ax+b}{ax}$. Låt eleverna eventuellt göra fel först och ta sedan upp frågan till debatt. Det blir mycket intressantare då, än om läraren varskor om faran i förväg. Klargör med enkla exempel. Kan $\frac{2x+3}{6}$ förkortas med 2?

6. Addition och subtraktion av bråk av typen $\frac{5}{x}-\frac{13}{x}+\frac{9}{x}$ och $\frac{2}{3b}+\frac{[illegible]}{2a}$. R. W. Fr. II 676, 680—683.

   Lämpligt torde vara att ej genomgå uppgifter av typen $\frac{[illegible]}{a-b}-1$ med binom i nämnaren.

7. Multiplikation och division av bråk. ex. $\frac{[illegible]}{3x} \cdot \frac{[illegible]}{10a}$ och $\frac{[illegible]}{8y} : \frac{[illegible]}{12y}$. R. W. Fr. II 694—697.

Kontrollera med sifferexempel att eleverna behärskar motsvarande partier på läran om allmänna bråk.

De flesta angivna uppgifterna på detta liksom på det föregående kursavsnittet måste hänföras till grundkursen. Överkursuppgifter finns i riklig mängd i läroboken.

KURSAVSNITT VI

Geometri. (Repetition.)

1. Vid geometriundervisningen har man att iakttaga följande synpunkter:
   a) Eleverna skall bibringas ett visst kunskapsmått omfattande vissa fundamentala begrepp, vissa satser och konstruktioner.
   b) De skall lära sig, hur ett bevis går till, hur en sats bevisas med hjälp av andra satser och ur axiom.
   c) De skall bibringas en viss färdighet att självständigt lösa enkla uppgifter.
   d) De skall lära sig att framställa sina tankar med de uttryckssätt och med de symboler, som är vedertagna inom matematiken.
2. Det är viktigt, att eleverna har sina ritböcker i geometri från föregående läsår kvar, så att läraren kan bygga på det förut genomgångna vid repetitionen.

Lämpligt är att de vid några enstaka lektioner får titta i och göra sig bekanta med en lärobok i geometri, t. ex. den förut nämnda av C. E. Sjöstedt. Syftet härmed är bl. a. att ge eleverna en uppfattning av att geometrin utgör en fast byggnad, där satserna bygger på varandra och på axiomen i en logisk följd. Dessutom skall påpekas för dem alla de skilda matematiska symboler, som begagnas. De skall veta skillnaden mellan problem och teorem och känna till de rubriker (Givet, Sökt, Lösning osv.) som används vid behandlingen av satserna.

Här nedan följer ett förslag till en del satser som kan behandlas på de 10 lektionstimmar, som jag anslagit till detta kursavsnitt.

Mom. 1. Först repeteras begreppen komplementvinklar, supplementvinklar, sidovinklar, vertikalvinklar, basvinklar i en likbent triangel. Som övningsuppgift undersökes, hur stor vinkeln är mellan bissektriserna till ett par vertikalvinklar. Tag ev. ett konkret sifferexempel först (en vinkel är 40°). Vid den likbenta triangeln kommer man in på sambandet mellan en sats och dess omvändning.

Mom. 2. Repetera begreppen alternatv. vid parallella linjer, likbelägna v., motställda v., ytterv. till en triangel. Tillhörande satser nämnes. Vinkelsumman i en triangel. Ev. kan parallellaxiomet beröras. Observera, att utgångspunkten är en annan i Åstrands studieplan.

Övningssats: Vinkeln mellan två linjer är lika med vinkeln mellan deras normaler. Olika figurer bör ritas och diskuteras. Dessutom: Beräkna toppvinkeln i en likbent triangel, om den ena yttervinkeln vid basen är 110°.

Mom. 3. Kongruensfallen. Det är av vikt att eleverna kan lydelsen på dem och likaså att de kan ge dem rätt nummer. Av IV kongruensfallet inläres endast specialfallet med rätvinkliga trianglar.

Mom. 4. Konstruktionsuppgifter med bevis. Åstrand IX mom. 8—12. Att dela en vinkel mitt itu. Att dela en sträcka mitt itu. Att draga en normal till en linje från en punkt.

Övningsuppgift: Konstruera höjderna i en trubbvinklig triangel (sidorna = 4 cm, 13 cm och 15 cm; uppmät höjdernas längder).

Mom. 5. Parallellogrammen. Definition och satser. Åstrand IX mom. 3. Man bör beivra vanligt förekommande fel vid definitionen av en parallellogram. Bl. a. får ej i en definition inrymmas satser, som kan bevisas.

Fråga: Är en rektangel (en kvadrat) en parallellogram? Satserna på parallellogrammen och romben ger utmärkta tillfällen att öva användningen av kongruensfallen.

Mom. 6. Cirkeln. Repetera begreppen radie, korda, sekant, sektor, segment.

Bevisa satsen om medelpunktsvinkeln och periferivinkeln på samma båge med tillhörande följdsatser, Åstrand XV mom. 1. Övningssats: Summan av två motstående vinklar i en cirkelfyrhörning är 180°.

Mom. 7. Tangenten till en cirkel. Definition och satser. Åstrand XV mom. 6.

Vinkeln mellan en tangent och en från tangeringspunkten dragen korda. Åstrand XV mom. 9. Tangenterna från en punkt utanför en cirkel. Åstrand XV mom. 8.

Mom. 8. In- och omskrivna cirklar. Åstrand XV mom. 10 och 11.

Mom. 9. Planimetriska övningsuppgifter. Behandlingen vid dessa skiljer sig från problemen och teoremen. Man inför några obekanta antingen genom ett antagande eller med hänvisning till en figur. Sedan kommer en kort motivering för ekvationen (t. ex. Vinkelsumman i en triangel är 180°), så ekvationen, dess lösning och Svar:

Jag har här medtagit ett minimum av satser, som behövs för vidare studier i matematik. De utgör tillsammans en grundkurs, som bör läras av alla elever i klassen. Alla satserna är upptagna i Åstrands studieplan för klasserna 7 och 8. Då emellertid kursinnehållet i dessa klasser är väl stort i förhållande till den anslagna tiden, hinner antagligen läraren ej genomgå geometrien så noggrant som föreslås i studieplanen. Dessutom skall ju enligt denna en del av eleverna, som ej kan tillgodogöra sig ett geometriskt resonemang, sysselsättas med individuellt räknearbete. Organiserandet av detta kommer antagligen att inkräkta på geometriundervisningen. Detta medför behovet av en omfattande och grundlig repetition av geometrien i klass 9.

KURSAVSNITT VII

Ekvationer. (Repetition.)

Åt detta kursavsnitt har enligt Åstrands studieplan rätt mycken tid anslagits i klasserna 7—8, varför repetitionen ej behöver bli så omfattande.

Huvudräkning: a) $11 - 2x = 3$; b) $12(7x - 5) = 24$;

[illegible] $\frac{17(2x - 18)}{25}$ [illegible]; d) $\frac{12}{x - 14} = 4$

Lämpliga övningsexempel: R. W. Fr. III 66—85.

Observera särskilt ex. 71 med termen $\frac{[illegible]}{0{,}6}$ och ex. 73 med dubbelbråket $\frac{2\ [illegible]}{[illegible]}$

Allt efter klassens nivå kan man ägna större eller mindre tid åt sådana svårare uppgifter (som ex. 73). Är klassen svag, är det nog lämpligast att alldeles hoppa över dem. Några ekvationer skall prövas. Därvid måste man tillse, att multiplikation och division med negativa tal ej får förekomma.

Dessutom: Bestäm a så att ekvationen $(4a - 1)x - 2(x + 3a) = 4$ får roten $x = 2$.

Om tiden och klassens nivå det tillåter kunde försök göras på uppgifter av följande typer:

a) Enkla bokstavsekvationer $ax = b$, $ax + bx = c$, $a(x - b) = c$, $px + q(a - x) = a \cdot r$.

b) a kg kaffe kostar b kr. Vad kostar då c kg kaffe av samma sort?

I ett bolag mellan två personer A och B hade A satsat m kr. och B n kr. Hur mycket fick de i utdelning om vinsten var k kr.?

En husmor betalade för a kg socker och b kg kaffe c kr. Ett kg kaffe kostade p kr. mer än 1 kg socker. Vad kostade 1 kg socker?

Det är ej meningen att dessa problem skall genomgås på en gång. Avsikten är att successivt vänja eleverna vid en generell, abstrakt tankegång. Läraren bör pröva sig fram och endast ge sådana problem som överkursuppgifter. Jfr Åstrand XVIII.

KURSAVSNITT VIII

Ekvationssystem

Huvudräkning:

a) $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 4x \\ 7x - y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 4x \\ 14x - 3y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{[illegible]} \\ 5x - 7v = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - 6 - x \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$ m. fl.

Övningsexempel: R. W. Fr. III 123—133.

Benämnda uppgifter: ex. 166—172.

F. ö. kan många av exemplen R. W. Fr. II 236—273 med fördel lösas med ekvationssystem.

KURSAVSNITT IX

Benämnda uppgifter. Problem hämtade från det praktiska livet

Till detta kursavsnitt kan hänföras sådana problem, som skall behandlas av klassens alla elever, både av dem som läser alternativkurs 1 och av de övriga som läser alternativkurs 2. Det är därför av vikt att läraren äger stor frihet, dels vid valet av uppgiftstyper, dels vad beträffar tidpunkten då detta kursavsnitt skall läsas.

I huvudmomenten till alternativkurs 2 förekommer bl. a.: Uppgifter valda med hänsyn till det praktiska livets krav och till undervisningen i andra ämnen, särskilt samhällskunskap. Det torde visa sig ändamålsenligt att efter någon tid, då lämpliga uppgifter på detta område utarbetats, låta ett visst urval av dem bli gemensam kurs.

Vilket stoff man än väljer bör arbetet därmed leda till en repetition och fördjupning av det förut genomgångna. Detta nås bl. a. genom att ge:

a) Exempel med ett flertal sifferuppgifter. (Det krävas större mognad att överblicka ett rikhaltigt siffermaterial.)

b) Uppgifter, i vilka avkortningar successivt måste göras.

c) Överslagsberäkningar.

d) Uppgifter (med t. ex. kakelplattor, tegelpannor, tapetrullar, billaster) vilka måste leda till heltalssvar.

e) Uppgifter med stora tal och små tal. (Exempel med ljushastigheten och avståndet till solen, tunna hinnor.)

I avvaktan på att lämplig exempelsamling utarbetas föreslår jag att man t. v. räknar s. k. hastighetsuppgifter och arbetsproblem. R. W. Fr. II 768—809 (Valda exempel).

KURSAVSNITT X

Tabeller och diagram

Detta kursavsnitt hör liksom det föregående till det gemensamma för alternativkurs 1 och 2. Enligt min åsikt kan man dock ej ägna det lika många timmar i kurs 1 som i kurs 2. Man får nöja sig med det som är väsentligt för fortsatta studier.

Framställningen anknytes till vad som lästs i föregående klass (Åstrand XIII). För att vinna tid bör läraren ha ett antal färdiga diagram att visa för eleverna, förslagsvis ex. 1—4 nedan. Dessa bör vara uppritade på stora kartonger, synliga för hela klassen, eller också kan ett balloptikon användas. Några firmor levererar s. k. filmband, dvs. en serie skioptikonbilder, lämpade för undervisningen. Om man kunde få fram en sådan serie, visande tabeller och diagram, avpassade för undervisningen i klasserna 7—9 i enhetsskolan, vore mycket vunnet.

Ett tredje förslag är att arbetsböcker utarbetades, i vilka till en början tabeller och diagram vore utsatta, sedan endast tabeller och axlar (med enheter) till diagrammen och slutligen endast tabeller med en tom rutad sida, på vilken eleverna själva finge rita in axlar, välja enheter och rita in diagrammet.

Som grafisk framställning dels är av stor praktisk betydelse, dels rätt utnyttjad utgör en god grund för fortsatta studier, lämnar jag här ett detaljerat förslag:

1. Ett stapeldiagram över medellängden av gossar i åldern 0—20 år.
2. Vikten av gossar i åldern 0—20 år, endast kurva (ej staplar).
3. Temperaturkurvan i januari, visande både plus- och minusgrader. Diskutera när temperaturen stiger och när den faller. Att —2° är högre än —5° behöver påpekas. Åstrand VII 1.

4. Tätheten av kvicksilver mellan —5° och +20° framgår av följande tabell

temp.	—5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°
täthet $\frac{g}{cm^3}$	13,608	13,596	13.583	13,571	13,558	13,546

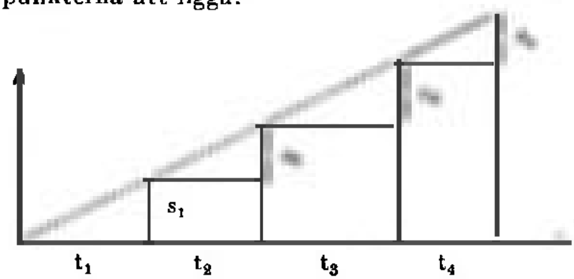
Den *oberoende* variabeln avsättes på den vågräta axeln, den *beroende* variabeln (= funktionen) avsättes på den lodräta axeln. Positiva värden avsättes till höger (respektive uppåt). I ex. 4 graderas lämpligen den lodräta axeln från 13.500 till 13,610 (uppåt!). Låt eleverna göra avläsningar med hjälp av diagrammet. Låt rutorna även vara så stora, att de lär sig uppskatta.

5. Folkmängden i Stockholm, Göteborg och Malmö vid slutet av åren 1850—1900 (se Statistisk Årsbok).
Här gäller det dels att rita tre kurvor i samma diagram, dels att finna lagom stor enhet på den lodräta axeln så att man kan approximativt avläsa värden från 13 000 till 780 000.

6. Väg—tid-diagram. En vägmätare på cykel avlästes vid vissa tidpunkter under en cykelfärd. Sammanhörande värden uppsattes i en tabell:

klockan	12.10	12.15	12.27	12.36
vägmätare	1 470,5	1 472,0	1 475,6	1 478,3 km

Rita ett diagram:
Uträkna tiderna från starten 12.10, uttryck dem i min. och och avsätt dem utefter den vågräta axeln. Uträkna de tillryggalagda vägarna i m och avsätt dem uppåt. Hur kommer punkterna att ligga?



Bilda de rätvinkliga trianglarna (se fig). Eftersom punkterna ligger i rät linje med utgångspunkten (origo), är trianglarna likformiga. (Åstrand XI 11.) Förhållandet mellan den lodräta och den vågräta kateten är då konstant. Kvoterna mellan mätetalen för de tillryggalagda vägsträckorna och för motsvarande tider blir då lika:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_3}{t_3} = \frac{s_4}{t_4}$$

Denna gemensamma kvot är cyklistens hastighet och blir här uttryckt i $\frac{m}{min}$

7. Avläs den elektriska mätaren hemma (kilowatt-timmätare) vid samma tidpunkt dagligen under 14 dagar och rita motsvarande diagram. Uträkna medelförbrukningen per dygn $\frac{\text{Kwh}}{\text{dygn}}$.
8. Tag reda på den för orten gällande tariffen (= priset per Kwh) och rita ett diagram, ur vilket man kan avläsa avgifter för en förbrukning upp till 200 Kwh.
9. Vanligen finns s. k. hushållstaxa med fast grundavgift och en lägre avgift för varje Kwh. Rita motsvarande diagram.
10. Inför x-axel, y-axel, koordinatsystem. Rita linjerna $y = 2x$, $y = 3x$, $y = 2x + 4$.

KURSAVSNITT XI

Några enkla statistiska begrepp

Frekvens, frekvensdiagram, medelvärde, medianvärde

Lämpligt torde vara att införa begreppen i samband med några exempel hämtade från elevernas erfarenhet.

Ex. 1: Vid en skrivning i en klass erhölls följande resultat:

Betyg	C(0)	BC(0,5)	B(1)	Ba(1,5)	AB(2)	a(2,5)	A(3)	S:a
Frekvens	1	3	8	13	3	6	1	35
Relativ frekv.	2,9%	8,6%	22,9%	37,1%	8,6%	17,1%	2,9%	100

Medelvärdet =

$$= \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 1 + 13 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2{,}5 + 1 \cdot 3}{35} =$$

$$= \frac{\text{[illegible]}}{35} = 1{,}5$$

Ex. 2. Längden av eleverna i en klass framgår av följande tabell:

Längd (cm):	150	155	160	165	170	175	180	185
Frekvens:	2	3	3	5	8	6	2	1

Till en grupp räknas de elever, vilkas längd avviker från gruppens längdsiffror med högst 2,5 cm. Till gruppen 160 räknas således de elever, vilkas längd ligger mellan 157,5 cm och 162,5 cm. Längden har mätts endast i cm.

Upprita ett frekvensdiagram. Frekvenserna avsättes som staplar på den lodräta axeln. Beräkna medellängden i klassen.

Ex. 3. Uppgör en tabell över antalet personer inom inkomstgrupperna: under 1 000, 1 000—2 000, 2 000—3 000, 3 000—5 000, osv. (Se tabeller i Statistisk Årsbok.) Beräkna medelvärdet av deras inkomster. (För att minska arbetet bör antalen personer avrundas till hela tusental.) Påpeka frekvensernas ojämna fördelning omkring medelvärdet. Undersök vilken inkomstgrupp som är så beskaffad att ungefär hälften av personerna har lägre och hälften högre inkomst. Jämför medelinkomst med medianinkomst.
Eftersom intervallen på den vågräta axeln ej är lika, representeras frekvenserna i detta exempel bäst av rektangelytor, ej av staplar.

Proportionalitet

Mom. 1. Om man köper olika mängder av en vara, t. ex. smör, är ju de priser man måste betala beroende av de mängder (antal kg), som man köper. Betecknas priset (uttryckt i kr.) med bokstaven p och mängden (i kg) med bokstaven m, så erhåller man vid division ett konstant värde på kvoten $\frac{p}{m}$. Detta tal anger vad 1 kg av varan kostar. I siffror skriver man

$$\frac{15{,}60}{3} = \frac{26{,}0}{5} = \frac{33{,}80}{6{,}5}$$

Med bokstäver uttryckes detta på följande sätt:

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \frac{p_3}{m_3}$$

Betecknas den gemensamma kvoten med bokstaven c, kan man sammanfatta det ovanstående i en formel $\frac{p}{m} = c$.

Avbilda sambandet grafiskt. Avsätt värdena av m på den vågräta axeln och priserna på den lodräta axeln. Mot varje smörmängd svarar ett pris, och dessa två tal anger läget av en punkt vid den grafiska avbildningen. De punkter, som man på så sätt erhåller, ligger i rät linje genom origo. Att kvoten $\frac{p}{m}$ är konstant sättes i relation till att motsvarande rätvinkliga trianglar är likformiga. Sambandet $\frac{p}{m} = c$ uttryckes även så: Priset är proportionellt mot vikten. (När vikten fördubblas, fördubblas även priset.)

Angiv en tabell över sammanhörande värden av väg och tid vid fritt fall och fråga om vägen är proportionell mot tiden.

Mom. 2. Vid täthetsbestämningar av t. ex. koppar i klass 7 erhölls följande värden

m	160	230	300	420	g
V	18	26	34	46	cm^3

m betyder massan och V volymen. Om man bildar kvoten mellan mätetalen för vikt och volym hos ett kopparstycke, erhålles ett tal, som visar sig vara approximativt detsamma för alla kopparstyckena. Vid grafisk avbildning erhålles punkter, som ligger nära en rät linje genom origo. Vikten är (approximativt) proportionell mot volymen.

Vid rörelse med konstant hastighet är vägen proportionell mot tiden (se Kursavsnitt X 6).

Ge sammanfattningsvis en definition på proportionalitet.

Inför $\frac{[illegible]}{x} = k$. Proportionalitetskonstant. Direkt proportionalitet mot två oberoende variabler, omvänd proportionalitet och likaså analogireglerna kan uteslutas.

KURSAVSNITT XIII

Transversalsatsen. 3:e likformighetsfallet. Satsen om ytskalan

Detta kursavsnitt är utmärkt väl behandlat i C. E. Sjöstedt Lärobok i Geometri för realskolor, Kap. III Likformiga figurer, varför jag nöjer mig med att hänvisa dit.

KURSAVSNITT XIV

Pythagoras' sats med tillämpningar

Mom. 1. Rita en rätvinklig triangel och drag höjden mot hypotenusan. Låt eleverna visa, att deltrianglarna är likformiga med den stora triangeln. Om kateterna är a och b, hypotenusan är c och katetens projektioner x och y, erhålles ur likformigheten $a^2 = cx$ och $b^2 = cy$ varav $a^2 + b^2 = c(x + y) = c^2$. Ekv. $a^2 = cx$ jämföres med vad som förut erhållits (Åstrand XVI 3).

Mom. 2. Beräkna den tredje sidan, om man känner två sidor i några enkla pythagoreiska trianglar (3, 4, 5) (6, 8, 10)

(5, 12, 13) (7, 24, 25). Beräkna även höjden mot hypotenusan i några av dem (ytan tecknas på två sätt). Beräkna höjden mot basen i den triangel, vars sidor är 17 cm, 17 cm och 16 cm.

Mom. 3. Tillämpningsuppgifter på Pythagoras' sats med ekvationer R. W. Fr. II 830—834.

KURSAVSNITT XV

Kvadratrötter. Irrationella tal

Enligt Anmärkningar till huvudmomenten punkt 10 skall eleverna i klasserna 7—8 göras bekanta med begreppet kvadratrot och dess beteckning samt få viss färdighet i användning av rottabell. Jag föreslår dock nedan en repetition från grunden.

Mom. 1. Rita en rätvinklig triangel, i vilken kateterna är 1 dm vardera. Om hypotenusan = x dm, erhålles ekvationen $x^2 = 2$. Denna går inte att lösa på samma sätt som $x^2 = 4$. Å andra sidan kan man genom mätning finna att hypotenusans längd är ungefär 1,41 dm. Diskutera om man kan uttrycka längden exakt med ett decimalbråk eller ett allmänt bråk. Som hypotenusan har en bestämd längd »måste» man kunna uttrycka den med ett bestämt tal (mätetalet). Detta blir ett oändligt (icke-periodiskt) decimalbråk. Ett sådant tal kallas irrationellt tal. De allmänna bråken, de avslutade decimalbråken jämte de periodiska decimalbråken kallas däremot för rationella tal. Förvandling av ett periodiskt decimalbråk till ett allmänt bråk behandlas i Åstrand XVII 7.

Ekvationen $x^2 = 2$ har en rot som vi betecknar med $\sqrt{2}$. Dess närmevärde är 1,414, och vi skriver $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ ($\approx$ uttalas approximativt lika med). Att det finns en negativ rot kan ju omnämnas. Rita på ett stort papper en liksidig triangel med sidan = 2 dm, konstruera en höjd och mät dess längd. Beräkna den med Pythagoras' sats. Låt eleverna själva finna ett närmevärde på $\sqrt{3}$. Jämför och diskutera vem som fått bästa resultat.

Mom. 2. Studera en kvadrattabell och en kvadratrotstabell. Jfr R. W. Fr. III 181—184.

Mom. 3. Rita ett diagram över de värden på x och y, som satisfiera ekvationen $y = x^2$, och låt därvid x variera mellan 0 och $+4$. Använd mm-papper och låt x även anta andra värden än heltalsvärden. Begagna diagrammet för att avläsa närmevärde på $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ m. fl. och jämför med tabellerna.

Mom. 4. Vad är $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$? Låt eleverna gärna multiplicera närmevärdena med varandra. Några finner då resultatet i kvadratrotstabellerna som $\sqrt{6}$. Undersök $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$.

Efter några exempel kommer de själva på de regler, som förenklar räkningarna. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.
Övningsex. R. W. Fr. III 192—195.

$$5\sqrt{2} \approx 5 \cdot 1{,}414 = 7{,}070, \quad \sqrt{50} = 7{,}071$$

Diskutera varför man erhåller olika resultat.

Mom. 5. Förenkla och angiv svaret med tre decimaler.

$$4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt{8} - 2\sqrt{2}$$

$$\frac{[illegible]}{\sqrt{2}}, \quad \frac{[illegible]}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{\frac{[illegible]}{2}}, \quad \frac{[illegible]}{\sqrt{2}}, \quad \frac{[illegible]}{\sqrt{3}},$$

$(\sqrt{3} + 2\sqrt{5})(3\sqrt{3} - \sqrt{5})$. Ex. R. W. Fr. III 196—201.

Förlängning med nämnarens konjugatfaktor i uttryck som $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ tillhör ej grundkursen utan kan i mån av tid räknas som överkursuppgifter.

KURSAVSNITT XVI

Planimetriska uppgifter med kvadratrötter

Kvadraten och den liksidiga triangeln

Eleverna bör vänjas att rita figurerna i lämplig skala, så att de med mätningar kan kontrollera svarets riktighet.

Mom. 1. Beräkna sidor och höjder i rätvinkliga och likbenta trianglar. Beräkna sidor, diagonaler och ytor av romber och likbenta parallelltrapets.

R. W. FR. III 221—236. Till grundkursen hänföres ungefär var tredje uppgift.

Mom. 2. Kvadraten och den liksidiga triangeln.

För de flesta av eleverna torde det vara naturligast att gå från det speciella fallet till det allmänna. Enligt min uppfattning bör man ta en del sifferexempel först och det allmänna fallet (formeln) sist.

R. W. Fr. III 237—246.

Överkurs 241—243.

Mom. 3. Halva kvadraten och halva liksidiga triangeln.

Detta moment tillhör de svårare på hela kursen, dvs. man kan lätt konstruera uppgifter, som överstiger elevernas förmåga. Om det för föregående moment i allmänhet räckt med Pythagoras' sats, så måste man här kunna tillämpa vissa formler. Mycket torde nog klarna, sedan man räknat litet på likformighet. Bäst är att endast ta med några få exempel som grundkurs och ta resten som överkurs. Har man tid, och tillmäter man detta moment större betydelse, kan man ju ta det i etapper. R. W. Fr. III 247—259.

Svårigheterna torde vara av samma slag som de man möter, när man räknar med π. I den liksidiga triangeln är höjden $\sqrt{3}$ gånger så stor som halva sidan. Cirkelns omkrets är π gånger så stor som diametern.

KURSAVSNITT XVII

Cirkeln och cirkelsektorn

Det är av fundamental betydelse, att eleverna lär sig beräkna cirkelns omkrets och yta. Enligt Åstrands studieplan skall man syssla med dessa problem vid upprepade tillfällen i klasserna 7 och 8. Se Åstrand, VI mom 18 och 19, VIII 8, 9 och 10, XII och XX.

Enkla uppgifter på detta område bör ofta förekomma på provräkningarna. Kontrollera först genom stickprov, att eleverna behärskar uppgifterna: R. W. Fr. II 835—855.

Först sedan detta område är klart kan man gå in på R. W. Fr. III 268—276, i vilka räkning med kvadratrötter kommer med.

KURSAVSNITT XVIII

Planimetri. Blandade uppgifter på likformighet och Pythagoras' sats

Likformighetsläran och Pythagoras' sats skall enligt huvudmomenten ägnas särskild uppmärksamhet.

Satserna befästes bäst genom att eleverna får räkna lagom svåra och något omväxlande problem på dem.

I detta kursavsnitt behövs det i somliga exempel att man först drar en lämplig linje för att bilda den rätvinkliga triangel, vars solvering ger den sökta sträckan. Exempel: Man drar normalen från medelpunkten i en cirkel för att beräkna kordans längd. Man drar radien till tangeringspunkten för att beräkna tangentens längd. I andra uppgifter måste man först visa att två trianglar är likformiga. Ur det samband, som erhålles därur, beräknas sedan den sökta sträckan. Lämpliga övn.ex. R. W. Fr. III 260—267 och 277—284.

KURSAVSNITT XIX

Stereometri

Detta kursavsnitt erbjuder rikliga tillfällen för eleverna att göra mätningar och försök. Skolan bör ha en tämligen rikhaltig samling modeller i trä eller plåt. Trådmodeller äro i vissa fall även lämpliga. För mätning av mantelytor bör det finnas modeller (förfärdigade av tunn kartongpapp), vilka kan utvecklas i ett plan. Eleverna tillverkar dem lämpligen själva. Celluloid är även mycket användbart material. Den klistras genom pensling med aceton. Volymer av kroppar bestämmes med hjälp av mätglas med vatten.

Läraren bör undersöka i vad mån de mätningar och försök som föreslagits i Åstrands studieplan, Kursavsnitt XX, medhunnits i klasserna 7—8.

Ett av målen för stereometriundervisningen lämnas i stadgans målsättning för matematiken. Det säges där, att elevernas förmåga av rumsföreställning bör uppövas. Eleverna bör fördenskull läras att rita snygga figurer i perspektiv. De ej synliga kantlinjerna skall streckas. Av vikt är även att eleverna lär namnen på de vanligaste kropparna: prisma, cylinder, pyramid, kon och klot. De bör känna till begreppen parallellcirkel och storcirkel på jordklotet.

Båda de nämnda synpunkterna tillgodoses, om eleverna får göra några enkla beräkningar på de nämnda kropparnas ytor och volymer.

Kursavsnittet är även nyttigt, emedan det ger rika tillfällen att öva på formler. Många av dess uppgifter är av praktisk natur. Eleverna möter dem vid sin fortsatta utbildning eller också i sin verksamhet efter avslutad skolgång.

Problem innehållande kroppars täthet bör likaså medtagas i detta sammanhang.

Kursavsnittet är som framgår av det ovanstående ur många synpunkter av stor betydelse, varför nödig tid bör avsättas för dess behandling.
Lämpliga exempel: R. W. Fr. III 285—327.

KURSAVSNITT XX

Allmänt brukliga matematiska beteckningar

1. I samband med räkning med digniteter i algebran är det lämpligt att visa eleverna huru stora tal numera skrivs i förkortad form t. ex. $753\,000\,000 = 7{,}53 \cdot 10^8$.
2. Symbolen $\approx$ (approximativt lika med) införes i samband med närmevärde av irrationella tal. Om $x^2 = 7$ så är $x = \sqrt{7} \approx 2{,}646$.
3. Eleverna bör göras förtrogna med uttrycken för »större än» ($>$) och »mindre än» ($<$). Om ett tal (x) ligger mellan 20 och 30, så skrives detta $20 < x < 30$.
4. I samband med införande av kvadratrötter som lösningen till ekvationen $x^2 = a$ kan man omnämna att lösningen till ekvationen $x^3 = a$ kallas tredje roten (= kubikroten) ur a och betecknas $\sqrt[3]{a}$.
5. I folkskolans lärokurs i matematik förekommer begreppet ellips. Man får en åskådlig bild av en ellipsformad yta, om man ställer en plan cirkulär platta i solstrålarnas väg och låter skuggan bildas på en plan horisontell yta. Formeln för ytan $= \pi \cdot a \cdot b$ kan ges, varefter eleverna får räkna några tillämpningsexempel. Någon större praktisk användning av denna ytformel eller av ellipsen över huvud taget torde eleverna knappast få.

   Att en sten vid sin kaströrelse beskriver en bana, som kallas parabel, kan ju vara av ett visst allmänbildande intresse.

6. Som avslutning på enhetsskolans matematikundervisning kan man lämna några historiska upplysningar. Eleverna bör få klart för sig, att den matematik de nu lärt har utvecklats under årtusendens lopp genom bidrag av en mångfald av snillrika människor. Några få namn på stora matematiker bör nämnas t. ex. Pythagoras, Archimedes, Descartes, Pascal, Newton, Gauss och Abel.[1] Utvecklingen är ej avslutad utan fortsätter med stor intensitet i jordens alla länder.

[1] Många sådana upplysningar i Nilsson-Wigforss, Aritmetik (1951) och Algebra (1953).